**第七讲函数与方程**

id:2147490844;FounderCES

题组函数的零点与方程的根

1*.*[2017全国卷Ⅲ,12,5分]已知函数*f*(*x*)*=x*2*-*2*x+a*(e*x-*1*+*e*-x+*1)有唯一零点,则*a=*()

A.- B. C. D.1

2*.*[2017山东,10,5分][理]已知当*x*∈[0,1]时,函数*y=*(*mx-*1)2的图象与*y=+m*的图象有且只有一个交点,则正实数*m*的取值范围是()

A.(0,1]∪[2,+∞) B.(0,1]∪[3,+∞)　　C.(0,]∪[2,+∞) D.(0,]∪[3,+∞)

3*.*[2016天津,8,5分][理]已知函数*f*(*x*)*=*(*a>*0,且*a*≠1)在R上单调递减,且关于*x*的方程*|f*(*x*)*|=*2*-x*恰有两个不相等的实数解,则*a*的取值范围是()

A.(0,] B.[,]　　　C.[,]∪{} D.[,)∪{}

4*.*[2014北京,6,5分]已知函数*f*(*x*)*=-*log2*x.*在下列区间中,包含*f*(*x*)零点的区间是()

A.(0,1) B.(1,2)

C.(2,4) D.(4,+∞)

5*.*[2015安徽,15,5分][理]设*x*3*+ax+b=*0,其中*a*,*b*均为实数*.*下列条件中,使得该三次方程仅有一个实根的是*.*(写出所有正确条件的编号)

①*a=-*3,*b=-*3;②*a=-*3,*b=*2;③*a=-*3,*b>*2;④*a=*0,*b=*2;⑤*a=*1,*b=*2*.*

6*.*[2015湖南,15,5分][理]已知函数*f*(*x*)*=*若存在实数*b*,使函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*-b*有两个零点,则*a*的取值范围是*.*

7*.*[2015湖北,12,5分][理]函数*f*(*x*)*=*4cos2cos(*-x*)*-*2sin *x-|*ln(*x+*1)*|*的零点个数为*.*

8*.*[2014江苏,13,5分][理]已知*f*(*x*)是定义在R上且周期为3的函数,当*x*∈[0,3)时,*f*(*x*)*=|x*2*-*2*x+|.*若函数*y=f*(*x*)*-a*在区间[*-*3,4]上有10个零点(互不相同),则实数*a*的取值范围是*.*

id:2147490858;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018豫西南部分示范性高中高三上学期联考,7]函数*f*(*x*)*=*ln *x-*的零点所在的区间为()

A.(0,1) B.(1,2) C.(2,3) D.(3,4)

2*.*[2018河南省漯河市高级中学三模,7]若*f*(*x*)是奇函数,且*x*0是*y=f*(*x*)*+*e*x*的一个零点,则*-x*0一定是下列哪个函数的零点()

A*.y=f*(*-x*)e*x-*1 B.*y=f*(*-x*)e*-x+*1　C*.y=*e*xf*(*x*)*-*1 D.*y=*e*xf*(*x*)*+*1

3*.*[2018西安八校联考,12]已知函数*f*(*x*)*=*ln *x-ax*2,若*f*(*x*)恰有两个不同的零点,则*a*的取值范围为()

A*.*(,*+∞*) B*.*[,*+∞*)

C*.*(0,) D*.*(0,]

4*.*[2017吉林省部分学校高考仿真考试,11]已知函数*f*(*x*)*=-*2*x*2*+*1,函数*g*(*x*)*=*则函数*y=|f*(*x*)*|-g*(*x*)的零点的个数为()

A.3 B.4 C.5 D.6

5*.*[2017湖南省长沙市高三一模,12]对于满足0*<b*≤3*a*的任意实数*a*,*b*,函数*f*(*x*)*=ax*2*+bx+c*总有两个不同的零点,则的取值范围是()

A.(1,] B.(1,2] C.[1,*+∞*) D.(2,*+∞*)

6*.*[2018湖北省百校联考,15]若函数*f*(*x*)*=*恰有3个零点,则*a*的取值范围为*.*

**Ｂ组提升题**

7*.*[2018豫北豫南名校精英联赛,7]已知函数*f*(*x*)*=*若关于*x*的方程*f* 2(*x*)*-af*(*x*)*+*1*=*0有且只有3个不同的根,则实数*a*的值为()

A.-2 B.1 C.2 D.3

8*.*[2018福州四校联考,12]已知函数*f*(*x*)*=*若*F*(*x*)*=f*[*f*(*x*)*+*1]*+m*有两个零点*x*1,*x*2,则*x*1·*x*2的取值范围是()

A*.*[4*-*2ln 2,*+∞*) B*.*(,*+∞*)

C*.*(*-∞*,4*-*2ln 2] D*.*(*-∞*,)

9*.*[2017湖北省武汉市武昌区高三调研,11]已知函数*f*(*x*)*=*当1*<a<*2时,关于*x*的方程*f*[*f*(*x*)]*=a*实数解的个数为()

A.2 B.3 C.4 D.5

10*.*[2017陕西省高三一检,12]设*x*0为函数*f*(*x*)*=*sin π*x*的零点,且满足*|x*0*|+f*(*x*0*+*)*<*33,则这样的零点有()

A.61个 B.63个 C.65个 D.67个

11*.*[2017成都市高三一诊,11]已知函数*f*(*x*)是定义在R上的偶函数,且*f*(*-x-*1)*=f*(*x-*1),当*x*∈[*-*1,0]时,*f*(*x*)*=-x*3,则关于*x*的方程*f*(*x*)*=|*cos π*x|*在[*-*,]上的所有实数解之和为()

A.-7 B.-6 C.-3 D.-1

**答案**

id:2147496990;FounderCES

１.C由*f*(*x*)*=x*2*-*2*x+a*(e*x-*1*+*e*-x+*1),得*f*(2*-x*)*=*(2*-x*)2*-*2(2*-x*)*+a*[e2*-x-*1*+*e*-*(2*-x*)*+*1]*=x*2*-*4*x+*4*-*4*+*

2*x+a*(e1*-x+*e*x-*1)*=x*2*-*2*x+a*(e*x-*1*+*e*-x+*1),

所以*f*(2*-x*)*=f*(*x*),即*x=*1为函数*f*(*x*)图象的对称轴*.*由题意知*f*(*x*)有唯一零点,所以*f*(*x*)的零点只能为*x=*1,即*f*(1)*=*12*-*2*×*1*+a*(e1*-*1*+*e*-*1*+*1)*=*0,解得*a=.*故选C*.*

2*.*B当0*<m*≤1时,需满足1*+m*≥(*m-*1)2,解得0≤*m*≤3,故这时0*<m*≤1*.*当*m>*1时,需满足(*m-*1)2≥1*+m*,解得*m*≥3或*m*≤0,故这时*m*≥3*.*综上可知,正实数*m*的取值范围为(0,1]∪[3,*+∞*)*.*

3*.*C当*x<*0时,*f*(*x*)单调递减,必须满足*-*≥0,故0*<a*≤,此时函数*f*(*x*)在[0,*+∞*)上单调递减,若*f*(*x*)在R上单调递减,还需3*a*≥1,解得*a*≥,所以≤*a*≤*.*结合函数图象(图略)知,当*x*≥0时,函数*y=|f*(*x*)*|*的图象和直线*y=*2*-x*有且只有一个公共点,即当*x*≥0时,方程*|f*(*x*)*|=*2*-x*只有一个实数解*.*因此,只需当*x<*0时,方程*|f*(*x*)*|=*2*-x*恰有一个实数解*.*根据已知条件可得,当*x<*0时,*f*(*x*)*>*0,即只需方程*f*(*x*)*=*2*-x*恰有一个实数解,即*x*2*+*(4*a-*3)*x+*3*a=*2*-x*,即*x*2*+*2(2*a-*1)*x+*3*a-*2*=*0在(*-∞*,0)上恰有唯一的实数解,*Δ=*4(2*a-*1)2*-*4(3*a-*2)*=*4(4*a*2*-*7*a+*3)*=*4(*a-*1)(4*a-*3),因为≤*a*≤,所以*Δ*≥0*.*当3*a-*2*<*0,即*a<*时,方程*x*2*+*2(2*a-*1)*x+*3*a-*2*=*0有一个正实根、一个负实根,满足要求;当3*a-*2*=*0,即*a=*时,方程*x*2*+*2(2*a-*1)*x+*3*a-*2*=*0的一个根为0、一个根为*-*,满足要求;当3*a-*2*>*0,即*<a<*时,因为*-*(2*a-*1)*<*0,此时方程*x*2*+*2(2*a-*1)*x+*3*a-*2*=*0有两个负实根,不满足要求;当*a=*时,方程*x*2*+*2(2*a-*1)*x+*3*a-*2*=*0有两个相等的负实根,满足要求*.*综上可知,实数*a*的取值范围是[,]∪{}*.*故选C*.*

4*.*C因为*f*(1)*=*6*-*log21*=*6*>*0,*f*(2)*=*3*-*log22*=*2*>*0,*f*(4)*=-*log24*=-<*0,所以函数*f*(*x*)的零点所在区间为(2,4),故选C*.*

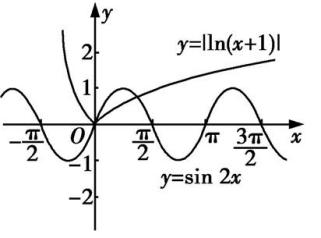
5*.*①③④⑤令*f*(*x*)*=x*3*+ax+b*,则*f* *'*(*x*)*=*3*x*2*+a.*对于*①*,由*a=b=-*3,得*f*(*x*)*=x*3*-*3*x-*3,

*f* *'*(*x*)*=*3(*x+*1)(*x-*1),*f*(*x*)极大值*=f*(*-*1)*=-*1*<*0,*f*(*x*)极小值*=f*(1)*=-*5*<*0,函数*f*(*x*)的图象与*x*轴只有一个交点,故*x*3*+ax+b=*0仅有一个实根;对于*②*,由*a=-*3,*b=*2,得*f*(*x*)*=x*3*-*3*x+*2,*f* *'*(*x*)*=*3(*x+*1)(*x-*1),*f*(*x*)极大值*=f*(*-*1)*=*4*>*0,*f*(*x*)极小值*=f*(1)*=*0,函数*f*(*x*)的图象与*x*轴有两个交点,故*x*3*+ax+b=*0有两个实根;对于*③*,由*a=-*3,*b>*2,得*f*(*x*)*=x*3*-*3*x+b*,*f* *'*(*x*)*=*3(*x+*1)(*x-*1),*f*(*x*)极大值*=f*(*-*1)*=*2*+b>*0,*f*(*x*)极小值*=f*(1)*=b-*2*>*0,函数*f*(*x*)的图象与*x*轴只有一个交点,故*x*3*+ax+b=*0仅有一个实根;对于*④*,由*a=*0,*b=*2,得*f*(*x*)*=x*3*+*2,*f* *'*(*x*)*=*3*x*2≥0,*f*(*x*)在R上单调递增,函数*f*(*x*)的图象与*x*轴只有一个交点,故*x*3*+ax+b=*0仅有一个实根;对于*⑤*,由*a=*1,*b=*2,得*f*(*x*)*=x*3*+x+*2,*f* *'*(*x*)*=*3*x*2*+*1*>*0,*f*(*x*)在R上单调递增,函数*f*(*x*)的图象与*x*轴只有一个交点,故*x*3*+ax+b=*0仅有一个实根*.*

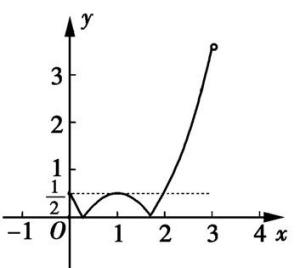
6*.*(*-∞*,0)∪(1,*+∞*)令*φ*(*x*)*=x*3(*x*≤*a*),*h*(*x*)*=x*2(*x>a*),函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*-b*有两个零点,即函数*y=f*(*x*)的图象与直线*y=b*有两个交点,结合图象(图略)可得*a<*0或*φ*(*a*)*>h*(*a*),即*a<*0或*a*3*>a*2,解得*a<*0或*a>*1,故*a*∈(*-∞*,0)∪(1,*+∞*)*.*

7*.*2因为*f*(*x*)*=*4cos2cos(*-x*)*-*2sin *x-|*ln(*x+*1)*|=*2(1*+*cos *x*)·sin *x-*2sin *x-|*ln(*x+*1)*|=*

sin 2*x-|*ln(*x+*1)*|*,所以函数*f*(*x*)的零点个数为函数*y=*sin 2*x*与*y=|*ln(*x+*1)*|*图象的交点的个数*.*函数*y=*sin 2*x*与*y=|*ln(*x+*1)*|*的图象如图所示,由图知,两函数图象有2个交点,所以函数*f*(*x*)有2个零点*.*



8*.*(0,)函数*y=f*(*x*)*-a*在区间[*-*3,4]上有互不相同的10个零点,即函数*y=f*(*x*),*x*∈[*-*3,4]与*y=a*的图象有10个不同的交点*.*在平面直角坐标系中作出函数*f*(*x*)在一个周期内的图象如图所示,可知当0*<a<*时满足题意*.*



id:2147497011;FounderCES

**Ａ组基础题**

1*.*B由题意知函数*f*(*x*)是增函数,因为*f*(1)*<*0,*f*(2)*=*ln 2*-=*ln 2*-*ln*>*0,所以函数*f*(*x*)的零点所在的区间是(1,2)*.*故选B*.*

2*.*C∵ *f*(*x*)是奇函数,∴*f*(*-x*)*=-f*(*x*)*.*

∵*x*0是*y=f*(*x*)*+*e*x*的一个零点,∴*f*(*x*0)*+=*0,∴*f*(*x*0)*=-*,把*-x*0分别代入四个选项,A中,*y=f*(*x*0)*-*1*=*-·*-*1*=-*1*-*1*=-*2,排除A;

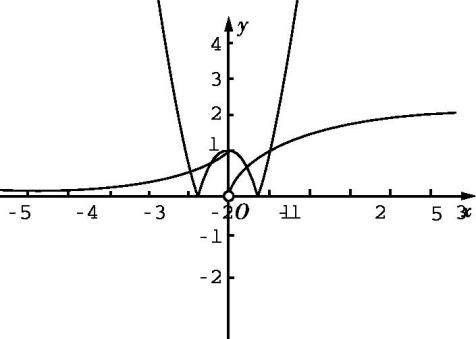
B中,*y=f*(*x*0)*+*1*=-*()2*+*1≠0,排除B;

C中,*y=f*(*-x*0)*-*1*=-f*(*x*0)*-*1*=-*1*=*1*-*1*=*0,C正确;

D中,*y=f*(*-x*0)*+*1*=*1*+*1*=*2,排除D*.*选C*.*

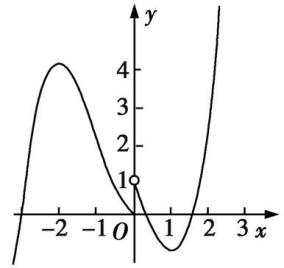
3*.*C函数*f*(*x*)的定义域为(0,*+∞*),*f* *'*(*x*)*=-*2*ax=.*当*a*≤0时,*f* *'*(*x*)*>*0恒成立,函数*f*(*x*)在(0,*+∞*)上单调递增,则函数*f*(*x*)不存在两个不同的零点*.*当*a>*0时,由*f* *'*(*x*)*=*0,得*x=*,当0*<x<*时,*f* *'*(*x*)*>*0,函数*f*(*x*)单调递增,当*x>*时,*f* *'*(*x*)*<*0,函数*f*(*x*)单调递减,所以*f*(*x*)的最大值为*f*()*=*ln*-a*()2*=-*ln 2*a-*,于是要使函数*f*(*x*)恰有两个不同的零点,则需满足*-*ln 2*a->*0,即ln 2*a<-*1,所以0*<*2*a<*,即0*<a<*,所以*a*的取值范围是(0,),故选C*.*

4*.*C函数*y=|f*(*x*)*|-g*(*x*)的零点的个数,即*|f*(*x*)*|-g*(*x*)*=*0的根的个数,可得*|f*(*x*)*|=g*(*x*),画出函数*|f*(*x*)*|*,*g*(*x*)的图象如图所示,观察函数的图象可知,它们的交点为5个,即函数的零点个数为5,故选C*.*



5*.*D依题意,对于方程*ax*2*+bx+c=*0,有*Δ=b*2*-*4*ac>*0,于是*c<*,从而*>=*1*+-*()2,对满足0*<b*≤3*a*的任意实数*a*,*b*恒成立*.*令*t=*,因为0*<b*≤3*a*,所以0*<t*≤3*.*因此*-t*2*+t+*1*=-*(*t-*2)2*+*2∈(1,2],故*>*2*.*故选D*.*

6.(*-*1,0)∪[1,4)设*g*(*x*)*=*作出函数*g*(*x*)的图象,如图D 2*-*7*-*7所示,∴*g*(*x*)的极大值为*g*(*-*2)*=*4,极小值为*g*(1)*=-*1,*g*(0)*=*0,当*x=*0时,*x*3*-*3*x+*1*=*03*-*3*×*0*+*1*=*1*.*函数*f*(*x*)恰有3个零点,即函数*g*(*x*)与*y=a*有3个交点,∴*a*∈(*-*1,0)∪[1,4)*.*

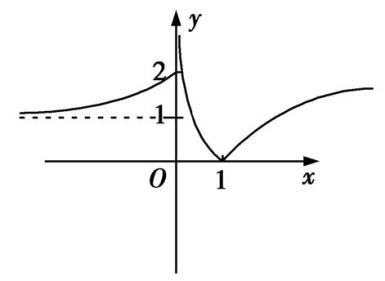


**Ｂ组提升题**

7*.*C作出函数*f*(*x*)*=*的图象(图略),令*f*(*x*)*=t*,关于*x*的方程*f* 2(*x*)*-af*(*x*)*+*1*=*0等价于*t*2*-at+*1*=*0,因为*t*1·*t*2*=*1,所以*t*1,*t*2同号,只有*t*1,*t*2同正时,方程才有根,假设*t*1*<t*2,则0*<t*1*<*1,*t*2*>*1,此时关于*x*的方程*f* 2(*x*)*-af*(*x*)*+*1*=*0有5个不同的根,只有*t*1*=t*2*=*1,关于*x*的方程*f* 2(*x*)*-af*(*x*)*+*1*=*0有且只有3个不同的根,此时*a=*2,故选C*.*

8*.*D因为函数*f*(*x*)*=*所以*F*(*x*)*=*由*F*(*x*)*=*0得,*x*1*=*,*x*2*=*4*-*2e*-m*,其中*m<*ln*.*设*t=*e*-m*,则*t>*,所以*x*1·*x*2*=*2e*t-*1(2*-t*),设*g*(*t*)*=*2e*t-*1(2*-t*),则*g'*(*t*)*=*2e*t-*1(1*-t*),因为*t>*,所以*g'*(*t*)*=*2e*t-*1(1*-t*)*<*0,即函数*g*(*t*)*=*2e*t-*1(2*-t*)在区间(,*+∞*)上是减函数,所以*g*(*t*)*<g*()*=*,故选D.

9*.*C1*<a<*2,令*u=f*(*x*),则*f*(*u*)*=a*,由*f*(*x*)的图象(如图)可知,若*u<*0,此时*f*(*x*)*=u*无解,若*u>*0,解得*<u<<*1或2*<*e*<u<*e2,显然,当*x<*0时,不可能使得*f*(*x*)*=u*有解,当*x>*0,*<u<<*1时,*f*(*x*)*=u*有2个解,当*x>*0,2*<*e*<u<*e2时,*f*(*x*)*=u*也有2个解*.*因此*f*[*f*(*x*)]*=a*有4个实数解*.*故选C*.*



10*.*C依题意得sin π*x*0*=*0,所以π*x*0*=k*π(*k*∈Z),即*x*0*=k*,*f*(*x*0*+*)*=*sin[(*x*0*+*)π]*=*sin(π*x*0*+*)*=*cos π*x*0*=*cos *k*π,所以*|x*0*|+f*(*x*0*+*)*<*33,即*|k|<*33*-*cos *k*π,当*k*为偶数时,*|k|<*32,则零点有31个;当*k*为奇数时,*|k|<*34,则零点有34个*.*所以共有31*+*34*=*65个零点,故选C*.*

11*.*A因为函数*f*(*x*)为偶函数,所以*f*(*-x-*1)*=f*(*x+*1)*=f*(*x-*1),所以函数*f*(*x*)的周期为2,又当*x*∈[*-*1,0]时,*f*(*x*)*=-x*3,由此在同一平面直角坐标系内作出函数*y=f*(*x*)与*y=|*cos π*x|*的图象,如图所示*.*由图知关于*x*的方程*f*(*x*)*=|*cos π*x|*在[*-*,]上的实数解有7个*.*不妨设*x*1*<x*2*<x*3*<x*4*<x*5*<x*6*<x*7,则由图得*x*1*+x*2*=-*4,*x*3*+x*5*=-*2,*x*4*=-*1,*x*6*+x*7*=*0,所以方程*f*(*x*)*=|*cos π*x|*在[*-*,]上的所有实数解的和为*-*4*-*2*-*1*+*0*=-*7,故选A*.*

